

Теорема Кронекера

07 июля

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α .

(а) При каких α он сможет побывать лишь в конечном числе точек окружности?

(б) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

(в) При каких α кузнечик сможет рано или поздно посетить любую дугу окружности?

(г) **Теорема Кронекера.** Если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит число вида $n\alpha - m$, где m, n — неотрицательные целые числа.

2. **Теорема Кронекера-Дирихле.** Докажите, что для любого действительного числа α и натурального числа m существует такое приближение рациональным числом $\frac{p}{q}$, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qm} \leq \frac{1}{q^2}$.

Опр. Логарифмом числа b по основанию a называется решение уравнения $a^x = b$. Обозначается логарифм следующим образом: $x = \log_a b$.

I. Проверьте следующие свойства:

(а) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$; (б) $\log_a b^c = c \log_a b$; (в) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

3. (а) Покажите, что решение уравнения $2^x = 10$ иррационально. (б) Докажите, что числа вида 2^n при натуральных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

4. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.

5. (а) В каждой целочисленной точке плоскости сидит круглый дятел радиуса r . Докажите, что куда ни глянь, всюду дятлы. Другими словами, докажите, что любой луч $y = kx$ пересекает какого-то дятла, помимо центрального.

(б) В углах прямоугольного бильярда находятся 4 лузы радиуса $1/1000$. Из одного из углов вылетает точечный шарик, который в дальнейшем движется прямолинейно, отражаясь от бортов по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шарик рано или поздно попадет в лузу.

6. Докажите, что степень двойки может начинаться на те же 2025 цифр, что и оканчиваться (конечно, число при этом должно быть минимум 4050-значное).

7. (а) Два кузнечика одновременно начинают прыгать по окружности из одной точки, один — с шагом α , другой — с шагом β . Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ рано или поздно оба одновременно окажутся в ε -окрестности стартовой точки.

- (6) Докажите, что не позднее чем за n^2 шагов оба они окажутся на расстоянии меньше $\frac{1}{n}$ от стартовой точки.
8. Существует ли такое натуральное n , что число 2^n начинается с цифр 12345, а число 3^n — с цифр 56789?
9. Докажите, что для любого вещественного числа α и фиксированного $r > 0$ найдутся натуральные n и m , такие что

$$|\alpha - (\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m})| < r.$$